

© 2025 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В АВТОНОМНОЙ СКОРРЕКТИРОВАННОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЕ ПУТЕМ КОНСТРУИРОВАНИЯ ПРИТЯГИВАЮЩЕГО ЦИКЛА

Рассматривается консервативная система, допускающая семейство одночастотных колебаний с областью Ω . Для нее строится управляемая автономная система с малым коэффициентом усиления регулятора; стабилизация выделенного колебания из Ω проводится построением цикла, который притягивает все траектории из области Ω и окрестности Ω . Находится универсальное управление, обладающее свойством адаптивности и действующее как нелинейная сила, линейная по скорости, отслеживающая текущее значение потенциальной энергии на движении. Цикл строится для любого колебания системы. В результате на базе консервативной системы конструируется новый класс автономных управляемых систем, рабочими режимами которого являются стабилизированные (в большом) циклы с любой желаемой энергией. Приводятся примеры.

Ключевые слова: консервативная система, одночастотное колебание, универсальное адаптивное управление, обратная связь, отслеживание потенциальной энергии, притягивающий цикл, стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231025060038, **EDN:** IKBIZK

1. Введение

Рассматриваются одночастотные колебания (периодические движения) консервативной системы. Они образуют семейства по параметру – постоянной энергии h . Семейства делятся на невырожденные и вырожденные. На невырожденном семействе период $T(h)$ монотонно меняется с постоянной h , примером является семейство колебаний маятника. На вырожденном семействе колебания являются изохронными.

Невырожденные колебания всегда продолжаются [1, 2] на глобальное семейство колебаний. В консервативной системе глобальное семейство описывается редуцированной консервативной системой с одной степенью свободы. Такой же результат справедлив для семейства вырожденных колебаний консервативной системы, но этот вопрос в статье отдельно не рассматривается. В любом случае сначала встает задача исследования консервативной системы с одной степенью свободы.

Идея управления колебанием посредством построения предельного цикла восходит к Л.С. Понтрягину, который в [3] нашел необходимые и достаточные условия для выделения предельного цикла из семейства периодических решений гамильтоновой системы: применялись негамильтоновые возмущения

ния. Ван дер Поль [4] исследовал релаксационные режимы (при отсутствии вынуждающей силы) регеративного приемника. А.А. Андронов (1929) обнаружил, что физическим воплощением кривых Пуанкаре являются построенные им и независимо Ван дер Полем устойчивые автоколебания. А. Пуанкаре [5, гл. VI] (1881) ввел понятие предельного цикла для системы на плоскости. Теория автоколебаний развита в школе А.А. Андропова [6].

А. Пуанкаре выделил изолированный случай, когда периодические решения сохраняются качественно с изменением параметра. В неизолитованных случаях происходит бифуркация; здесь результаты Н.Н. Боголюбова [7], И.Г. Малкина [8], В.К. Мельникова [9] стали основными. Они нашли продолжение во многих направлениях, включая, например, негладкую динамику (см. обзор [10]).

В автономной ε -возмущенной системе в результате бифуркации рождается цикл. При этом жорданова клетка из нулевых характеристических показателей (ХП) распадается: один нулевой ХП сохраняется, а другой ХП равен $-\varepsilon\alpha$. В случае $\alpha > 0$ справедлива теорема Андропова–Витта [11] об устойчивости периодического движения автономной системы. Понятие цикла стало применяться и в многомерной системе [12]. Для нее также справедлива теорема Андропова–Витта. Формула для вычисления числа α дается в [13].

В линейной периодической системе ХП является корнем характеристического уравнения приведенной по Ляпунову системы с постоянными коэффициентами.

В автономной системе решение определяется с точностью до сдвига начальной точки на траектории. Поэтому в теореме Андропова–Витта при переходе в окрестность периодического движения для системы n -го порядка ставится задача об асимптотической устойчивости по Румянцеву [14] по $n - 1$ переменным – отклонениям от указанного движения. Решение получается для ХП с отрицательными действительными частями; для системы на плоскости вычисляется одно число $-\varepsilon\alpha$. В случае теоремы Андропова–Витта полученное свойство называется орбитальной асимптотической устойчивостью периодического движения или притяжением [15] с уточнением области притяжения траекторий: в малом (локально), в большом (глобально).

Циклом называется изолированное периодическое решение автономной системы [12]. Притягивающий цикл является орбитально асимптотически устойчивым одночастотным колебанием. В управляемой автономной системе построением притягивающего цикла решается задача стабилизации колебания.

В [13] показано, что в окрестности цикла диссипация типа Ван дер Поля, в смысле независимости от рассматриваемой системы с колебаниями, обладает универсальностью. Для математического маятника из [13] следует стабилизация (в малом) любого колебания, если применяется адаптивная схема стабилизации [2]. В схеме применяется управление, параметр в котором выбирается в зависимости от значения параметра для стабилизируемого колебания:

управление обладает свойством адаптивности. Схема может применяться самостоятельно или в составе более общей адаптивной системы управления.

Для достижения цикла и притягивающего цикла применяется обратная связь, в которой информация о траектории поступает в отслеживающий координату регулятор типа Ван дер Поля, формирующий без задержки диссипацию в текущей точке траектории. Таким образом, решается задача стабилизации в окрестности рассматриваемого колебания. Для глобальной стабилизации обратная связь строится на отслеживании потенциальной энергии и описывается в данной статье.

Другие исследования по стабилизации желаемого режима колебания отличаются применением управлений, явно зависящих от времени. Приведем некоторые из них. Обзор на примере перевернутого маятника дается в [16]. В [17, 18] предлагается раскачивающее управление (swinging control). В [19] решается задача об орбитальной стабилизации периодических решений малоприводных нелинейных систем. Синтезированный нелинейный закон управления с обратной связью зависит от времени. Стабилизация желаемых уровней механической энергии посредством импульсного управления проводится в [20], робастное стабилизирующее управление колебаниями ищется неявным методом Ляпунова в [21], стабилизация электродинамическим управлением происходит в [22].

В данной статье строится ε -скорректированная консервативная система, обладающая притягивающим циклом. Область его притяжения включает область колебаний Ω консервативной системы и ε -окрестность Ω . Решается глобальная задача стабилизации. Локальная задача решалась в [2] для редуцированной консервативной системы с одной степенью свободы.

2. Консервативная система с одной степенью свободы. Синтез управления

Рассматривается гладкая консервативная система с одной степенью свободы, допускающая семейство Σ одночастотных колебаний по параметру h , где h – значение постоянной энергии. Согласно [1] такое семейство всегда продолжается до глобального, поэтому рассматривается глобальное семейство Σ . Оно занимает область колебаний Ω . Период на семействе может возрастать (математический маятник), быть постоянным (гармонический осциллятор) или убывать (уравнение $\ddot{x} + x^3 = 0$). При действии ε -малой силы (управления с малым коэффициентом усиления регулятора ε) получается автономная скорректированная (управляемая) консервативная система

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x) = \varepsilon u(x, \dot{x}).$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) допускает интеграл энергии

$$(2) \quad \dot{x}^2 = 2(h - \Pi(x)), \quad \Pi = \int f(x) dx.$$

В области Ω имеем $0 < \Pi(x) \leq h$. На семействе Σ координата описывается формулой $x = \varphi(h, t)$, а период $T = T(h)$ является функцией от постоянной энергии h .

Выбирается гладкая функция u , не зависящая явно от времени (автономное управление). В задаче стабилизации управление должно обеспечивать локальное притяжение к циклу, поэтому функция $u(x, \dot{x})$ согласно [13] будет иметь вид: $u = a(x, \dot{x})\dot{x}$. Сама функция $a = 1 - Kx^2$ найдена в [13]; она гарантирует существование цикла. Выбором в ней постоянной $K = K(h^*)$ в [13] достигается орбитальная асимптотическая устойчивость цикла, рождающегося из колебания консервативной системы с энергией h^* . Локальный результат становится глобальным для изохронного семейства колебаний. Это демонстрируется в уравнении Ван дер Поля. Однако для невырожденного семейства колебаний локальный результат не распространяется на всю область колебаний Ω .

При решении локальной задачи в [13] предлагается для невырожденного семейства колебаний учитывать зависимость $K(h)$ от значения энергии h . Тем самым в скорректированной системе строится цикл, близкий к колебанию консервативной системы, обладающей желаемой энергией $h = h^*$. Для этого выбирается $K = K(h^*)$.

В данной статье применяется управление, отслеживающее в цепи обратной связи текущую потенциальную энергию на движении. В управляемой консервативной системе

$$(3) \quad \ddot{x} + f(x) = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)]\dot{x}$$

ставится задача существования цикла, близкого к колебанию самой консервативной системы с энергией $h = h^* > 0$. Синтез закона управления проводится в исследовании.

Записывается амплитудное (бифуркационное) уравнение

$$(4) \quad I(h) \equiv \int_0^{T^*} [1 - K(h^*)\Pi(x)]\dot{x}^2 dt = 0,$$

в котором потенциальная $\Pi(x)$ и кинетическая $\tilde{T} = \dot{x}^2/2$ энергии вычисляются на решении $x = \varphi(h, t)$. Смысл равенства (4) заключается в выполнении необходимых и достаточных условий существования T^* -периодического решения в первом по ε приближении. В (4) учитывается, что в консервативной системе сопряженное решение $\psi = -\dot{\varphi}$. Оказалось, что условие $dI(h^*)/dh \neq 0$ является достаточным для существования периодического решения возмущенного уравнения (3) (см. [7–9]). Этот общий результат для автономной системы (3) означает рождение цикла. При отрицательном значении производной цикл устойчив: формула для ХП приводится в [13].

Тождество

$$(5) \quad \int_0^T [1 - K(h)\Pi(\varphi(h, t))] \dot{\varphi}(h, t)^2 dt \equiv 0$$

означает выполнение условий существования периодического решения в первом приближении по ε для всех значений h . Из него находится функция

$$(6) \quad K(h) = \frac{\int_0^T (h - \Pi(\varphi(h, t))) dt}{\int_0^T \Pi(\varphi(h, t)) (h - \Pi(\varphi(h, t))) dt}.$$

В (6) знаменатель в области колебаний Ω отличен от нуля. Функция $K(h)$ определяется единственным образом через потенциальную энергию Π , которая меняется с временем t на траектории. Каждому значению h консервативной системы отвечает только одна траектория и одно значение $K(h)$.

С другой стороны, из формулы (5) при верхнем пределе интегрирования $T = T^*$ и числе $K(h) = K(h^*)$ получается амплитудное уравнение (4) для нахождения значения h , отвечающего циклу. Явный вид функции $K(h)$ находится далее в разделе 3.

Уравнение (3) задает отображение фазовой плоскости на себя: $t : 0 \rightarrow T$. При этом кривая $\Gamma(h, 0) = \{x(h, 0), \dot{x}(0)\}$ отображается на кривую $\Gamma(h, T) = \{x(h, T), \dot{x}(T)\}$. Существование единственного корня $h = h^*$ уравнения (4) означает, что при $h = h^*$ точка $\Gamma(h^*, 0)$ совпадает с точкой $\Gamma(h^*, T)$. И это обнаруживается для построенных кривых уже по первому приближению по ε : необходимые и достаточные условия в первом приближении становятся достаточными для существования неподвижной точки отображения по первому ε -приближению. Для единственного корня неподвижная точка отображения будет изолированной, что соответствует изолированному периодическому решению периода T . С учетом того, что $T(h^*) = T^*$, получается цикл периода T^* . Условие $dI(h^*)/dh < 0$ выполняется для сжимающего отображения: цикл становится орбитально асимптотически устойчивым.

3. Притяжение в малом

Интеграл (4) берется на отрезке $t \in [0, T^*]$. В нем функция $\Pi(x)$ зависит только от x и вычисляется через решение $x = \varphi(h, t)$. При замене $\tau = (T(h)/T^*)t$ – переменной, по которой берется интеграл (4) координата x уже напрямую зависит только от τ . Функция $x(h, \tau)$ становится T^* -периодической для всех значений параметра h . Для колебания с нулевой начальной скоростью получается:

$$(7) \quad x(h, \tau) = x(h, 0)e(\tau), \quad e(\tau) = e(\tau + T^*).$$

Функция $e(\tau)$ меняется на отрезке $[0, 1]$. То же самое справедливо для функции $\Pi(x(h, \tau))$. При $\tau = 0$ имеем $\Pi(x(h, 0)) = h$. Поэтому с учетом выражения (7) получается равенство $\Pi(x(h, \tau)) = hz(\tau)$, в котором для заданной потенциальной энергии конкретная функция $z(\tau)$ вычисляется. Более общий анализ применения переменной τ приводится в Приложении, в котором теорема 4

является по сути дополнением к основным результатам и представляет самостоятельный интерес.

С учетом нового выражения для потенциальной энергии Π преобразуется амплитудное уравнение (4):

$$(8) \quad I(h) = 0, \quad I(h) \equiv h \int_0^{T^*} (1 - K(h^*)hz)(1 - z)d\tau.$$

Функция $I(h)$ представляется в виде

$$(9) \quad I(h) = h(\alpha - \beta h), \quad \alpha = \int_0^{T^*} (1 - z)d\tau, \quad \beta = -K(h^*) \int_0^{T^*} z(1 - z)d\tau.$$

Становится ясным, что уравнение (8) допускает единственный, отличный от нуля, корень $h^* = \alpha/\beta$.

Тождество (5) принимает вид

$$h \int_0^{T^*} (1 - K(h)hz)(1 - z)d\tau \equiv 0.$$

Поэтому для точки $h = h^*$ получается

$$\frac{d}{dh} \left(h \int_0^{T^*} (1 - K(h^*)hz)(1 - z)d\tau \right)_{h=h^*} - \frac{dK(h^*)}{dh} (h^*)^2 \int_0^{T^*} z(1 - z)d\tau \equiv 0.$$

Производная в точке, соответствующей циклу, вычисляется по формуле

$$(10) \quad \frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh} (h^*)^2 \int_0^{T^*} z(1 - z)d\tau.$$

Функция (6) дается выражением

$$(11) \quad K(h) = \frac{\int_0^{T^*} (1 - z(\tau))d\tau}{h \int_0^{T^*} z(\tau)(1 - z(\tau))d\tau} = \frac{b}{h}, \quad b = \text{const} > 0.$$

Интегралы в (11) не зависят от постоянной энергии h и принимают положительные значения как суммы интегралов на четвертях периода. Поэтому $K(h) = b/h$, где постоянная $b > 0$.

Формула (11) справедлива для любого типа семейства колебаний: с возрастающим (убывающим) периодом на семействе, изохронного семейства. Зависимость (11) является важной характеристикой семейства колебаний.

Доказывается следующее утверждение о локальной стабилизируемости цикла.

Теорема 1. В ε -скорректированной консервативной системе (3) всегда реализуется орбитально асимптотически устойчивый (в малом) цикл, близкий к колебанию консервативной системы с энергией $h = h^*$. Цикл притягивает траектории из своей $O(\varepsilon)$ -окрестности.

Доказательство. Согласно амплитудному уравнению (8) скорректированная консервативная система (3) имеет цикл, близкий к колебанию консервативной системы с энергией $h^* = \alpha/\beta$. В этой точке вычисляется производная (10), знак которой совпадает со знаком числа

$$\frac{dK(h^*)}{dh} = -\frac{b}{(h^*)^2} < 0.$$

Поэтому по формуле (10) производная $dI(h^*)/dh < 0$, и отображение $t : 0 \rightarrow T^*$ является сжимающим: все траектории из окрестности цикла притягиваются к циклу.

Замечание 1. Применение производной $dK(h^*)/dh$ стало обычным для доказательства локальных результатов о цикле. Однако неравенство $dI(h^*)/dh = -h^*\beta < 0$ можно вывести непосредственно из выражения (9).

4. Притяжение цикла в большом

Для системы (1) определяется полная механическая энергия – функция

$$(12) \quad E \equiv \frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x).$$

Она принимает постоянное значение h на решениях консервативной системы. Для скорректированной консервативной системы справедливо равенство

$$(13) \quad \frac{dE}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)]\dot{x}^2,$$

где

$$\dot{x}^2 = 2(E - \Pi(x)).$$

При $\varepsilon = 0$ имеем: $E = h(\text{const}) > 0$.

Вычисление приращения ΔE энергии (12) на периоде $T(h)$ проводится для колебания с энергией h . Поэтому для $\varepsilon > 0$ записывается

$$(14) \quad \Pi(x) = \Pi(\varphi) + h\varepsilon\rho(\varepsilon, x), \quad E - \Pi(x) = h - \Pi(\varphi) + h\varepsilon\sigma(\varepsilon, x)$$

с функциями ρ и σ порядка единицы. Интегрирование проводится по переменной τ на отрезке $[0, T^*]$. В результате получается формула

$$(15) \quad \Delta E(\varepsilon, h) = \varepsilon \frac{2T(h)}{T^*} [I(h) + \varepsilon h F(\varepsilon, h)],$$

в которой $\varepsilon h F(\varepsilon, h)$ вычисляется подстановкой выражений (14) в равенство (13) и отвечает слагаемым $h\varepsilon\rho$ и $h\varepsilon\sigma$. Она справедлива во всей рассматриваемой области колебаний Ω консервативной системы.

Функция $E(\varepsilon, h^*, \tau)$, вычисленная на цикле, будет T^* -периодической, поэтому $\Delta E(\varepsilon, h^*) = 0$. Для цикла выполняется амплитудное уравнение $I(h^*) = 0$. Как следствие для цикла справедливо равенство $F(\varepsilon, h^*) = 0$.

Лемма 1. Существует не зависящее от h^ число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ уравнение*

$$(16) \quad I(h) + \varepsilon h F(\varepsilon, h) = 0$$

имеет единственный корень.

Доказательство. С представлением (9) уравнение (16) упрощается:

$$V \equiv G(h) + \varepsilon F(\varepsilon, h) = 0, \quad G \equiv \alpha - \beta h.$$

Уравнение $G(h) = 0$ имеет корень $h^* = \alpha/\beta$, отвечающий циклу. Согласно теореме 1 цикл локально притягивает. Значит, функция $G(h)$ для $h \neq h^*$ при малых ε принимает значения одного знака. Функции $F(\varepsilon, h)$ в точке $h = h^*$ обращается в ноль. Поэтому функция V преобразуется к виду

$$(17) \quad V = (\alpha - \beta h)(1 + \varepsilon W(\varepsilon, h)).$$

При малых ε знак V совпадает со знаком G . Однако с ростом ε второй множитель в (17) может обратиться в ноль. Соответствующее значение $\varepsilon(h)$ зависит от h . Для цикла с $h = h^*$ выбирается наименьшее значение числа $\varepsilon(h(h^*))$. Нижняя грань множества $\{\varepsilon(h^*)\}$ обозначается через ε_0 . Тогда для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ уравнение (16) имеет единственный корень, не зависящий от конкретного значения h^* . При этом согласно (9) и (17) существование корня в уравнении (16) определяется слагаемым $G(h)$, которое имеет единственный корень.

Лемма 1 доказана.

Далее скорректированная система (3) исследуется при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Рассматривается область колебаний Ω консервативной системы; в рассматриваемой консервативной системе может быть не единственная область колебаний.

Теорема 2. Существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ скорректированная консервативная система (3) всегда обладает единственным циклом, который притягивает все траектории области колебаний Ω консервативной системы.

Доказательство. В области колебаний Ω скорректированная консервативная система (3) допускает (лемма 1) единственный цикл: соответствующее значение энергии консервативной системы при этом $h = h^*$. На цикле $\Delta E(\varepsilon, h^*) = 0$. Вне цикла знак функции $\Delta E(\varepsilon, h)$ совпадает со знаком линейной функции $G(h)$, $G(h^*) = 0$. Скорость изменения функции $dG(h)/dh = -\beta < 0$. Следовательно, функция $G(h) \rightarrow 0$, и траектории скорректированной системы (3) стремятся к циклу. Это происходит с любой траекторией из области колебаний Ω консервативной системы.

Теорема 2 доказана.

5. Многомерная система

По теореме о глобальном семействе [1, теорема 1] в многомерной системе происходит разделение переменных. Переменная x описывает семейство колебаний Σ на многообразии Ω , инвариантном относительно фазового потока консервативной системы. Вне многообразия Ω динамика консервативной системы дается вектором y размерности $n - 1$. В области Ω вектор $y \equiv 0$. Поэтому вне Ω изучается движение консервативной системы в окрестности нулевого решения $y = 0$.

Согласно Пуанкаре характеристическое уравнение консервативной системы является возвратным: корни уравнения делятся на пары, содержащие числа с противоположными знаками. Поэтому в случае действительного корня при действии ε -малого управления уходящие решения останутся уходящими. Следовательно, необходимым условием притяжения решений к Ω является отсутствие корней с действительными частями.

Вместе с выделением интегрального многообразия Ω строится ε -скорректированная система (3) по переменной x . Для переменной y в окрестности точки $y = 0$ применяются главные координаты. Далее рассматривается управляемая консервативная система

$$(18) \quad \begin{aligned} \ddot{y}_i + k_i y_i + Y_i(y) &= \varepsilon[(1 - K(h^*)\Pi(x)]\dot{y}_i, \\ k_i &= \text{const}, k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

Энергия E_y консервативной системы по переменной y согласно (18) меняется по закону

$$(19) \quad \frac{dE_y}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)]\dot{y}^2, \quad \dot{y}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \dot{y}_i^2,$$

подобному закону (13) для переменной x . При этом $E_y = h_y = \text{const}$ при $\varepsilon = 0$.

Закону изменения энергии всей консервативной системы

$$\frac{d(E_x + E_y)}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)](\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

записанной в переменных x и y , соответствует амплитудное уравнение

$$(20) \quad \tilde{I}(\tilde{h}) \equiv - \int_0^{T^*} [1 - K(h^*)\Pi(x)](\dot{x}^2 + \dot{y}^2)dt = 0, \quad \tilde{h} = h + h_y.$$

Функция $\tilde{I}(\tilde{h})$ допускает простой корень $\tilde{h} = h^*$, $h_y^* = 0$, что следует из наличия простого корня в уравнении (4). Простому корню уравнения (20) отвечает цикл управляемой системы (21) (см. [8, гл. VI, §8, с. 413, §9, с. 417]). Функция $\tilde{I}(\tilde{h})$ непрерывна, и цикл всей системы совпадает с циклом на Ω .

Из законов (13) и (19) выводится равенство

$$\dot{y}^2 dE = \dot{x}^2 dE_y,$$

откуда следует, что энергия в системе по переменной y меняется на периоде (возрастает и убывает) точно так же, как в системе по переменной x . При этом по переменной x согласно теореме 2 приращение $\Delta E(\varepsilon, h)$ за период стремится к нулевому значению, а траектория на многообразии Ω – к единственному циклу. Тогда по переменной y приращение $\Delta E_y(\varepsilon, h)$ за период стремится к нулевому значению, а траектория – к единственному равновесию $y = 0$, отвечающему циклу на Ω .

Таким образом, все траектории области Ω и ε -окрестности Ω притягиваются к циклу. Результат справедлив независимо от того, в каких координатах задается консервативная система.

Далее рассматривается управляемая система

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \varepsilon [1 - K(h^*)\Pi(x)] \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_s}, \quad s = 1, \dots, n,$$

заданная уравнениями Лагранжа второго рода. Здесь $\tilde{T}$ – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия. Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ система (21) допускает семейство Σ одночастотных колебаний; оно занимает двумерную область Ω . На Ω система описывается переменной x ; в управлении отслеживается потенциальная энергия на решении. Выбирается $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 – конечное число для семейства колебаний Ω ; h^* – значение энергии, отвечающее циклу в Ω , а на Ω равновесию соответствует значение энергии $h = 0$.

В системе, описываемой уравнениями Ланранжа второго рода, глобальное семейство периодических движений строится в [1] продолжением локального ляпуновского семейства. Последнее рождается из равновесия. Согласно теореме Ляпунова о центре [23] для существования семейства невырожденных локальных нелинейных периодических решений, кроме наличия чисто мнимых корней, в системе (18) требуется нерезонансность частот $\sqrt{k_j} \neq p\sqrt{k_s}$, $p \in \mathbb{N}$. При этом ляпуновское семейство для наибольшей частоты по теореме Ляпунова о центре [23] всегда существует. В анализе системы (18) указанные условия не налагались. Они возникают в лагранжевой системе. Имея это в виду, перейдем к управляемой системе (21).

Если не выделять главные координаты для системы по y , то в правых частях системы (18) будут линейные комбинации скоростей $\dot{y}_i$; они являются частными производными от кинетической энергии системы $\tilde{T}$ по $\dot{y}_s$. Восстановление системы (21) завершается возвратом к началу построения редуцированной системы с одной степенью свободы, проведенному в [1]. На этом этапе к линейной комбинации скоростей $\dot{y}_i$ добавляется скорость $\dot{x}$ с постоянным множителем.

При формулировке теоремы 3 предполагается, что условия теоремы Ляпунова о центре, примыкающем к области колебаний Ω , выполнены.

Теорема 3 (о скорректированной консервативной системе). Пусть консервативная система описывается уравнением Лагранжа второго рода и допускает семейство колебаний с областью Ω . Тогда найдется число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что скорректированная система (21) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ всегда имеет в Ω единственный цикл, который ε -близок к колебанию консервативной системы с энергией $h = h^$. Цикл притягивает траектории из области колебаний Ω и ε -близкие к Ω траектории. Закон изменения энергии $E = \tilde{T} + \Pi$ консервативной системы на решениях скорректированной системы дается равенством*

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)]\tilde{T}.$$

Замечание 2. Теорема о скорректированной консервативной системе формулируется для лагранжевой системы. Применение теоремы 3 для консервативной системы, записанной в других переменных, демонстрируется в примерах.

6. Некоторые примеры

Сначала проанализируем скорость приближения к циклу по энергии. Закон изменения энергии на траекториях скорректированной консервативной системы (3) дается формулой (13). Приращение энергии на периоде вычисляется по формуле (15). При данном $\varepsilon < \varepsilon_0$ оно равно $2T(h)hV$. С другой стороны, на уровне энергии h приближение к циклу происходит со скоростью V , почти линейной по h . При $h > h^*$ притяжение к циклу происходит с ростом скорости V , которая на указанном интервале отрицательна. Для траекторий с начальной положительной энергией в процессе приближения к циклу скорость V все время положительна. Скорость V в точке $h^* = \alpha/\beta$ меняет знак, начиная с плюса на минус. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Уравнение Ван дер Поля в адаптивной схеме стабилизации описывается уравнением

$$(22) \quad \ddot{x} + x = \varepsilon(1 - K(h^*)x^2)\dot{x}, \quad K(h^*) = \text{const} > 0.$$

В уравнении Ван дер Поля $K(h^*) = 1$.

При $\varepsilon = 0$ имеем гармонический осциллятор с потенциальной энергией: $\Pi = x^2/2$. Порождающее колебание дается формулой $x = A \cos t$, где A – амплитуда. Энергия $h = A^2/2$. Поэтому $\tau = 2t$, $\Pi = hz(\tau)$, $z = 1 + \cos 2t$. Вычисление по формуле (11) дает число $b = 2$. Амплитуда для цикла $A^* = 2/\sqrt{K(h^*)}$.

Уравнение (22) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому скорректированный линейный осциллятор обладает глобально притягивающим циклом, проходящим, в зависимости от $K(h^*)$, через любую заданную точку фазовой плоскости. В уравнении (22) область колебаний Ω совпадает со всей фазовой плоскостью, исключая выколотый нуль. Скорость приближения к циклу вдалеке от него, а также около нуля пропорциональна εh^2 . Вблизи цикла с энергией h^* указанная скорость равна $\varepsilon h|\Delta h|$, $|\Delta h| = h - h^*$.

Построение цикла в уравнении (22) при $K = 1$ проводилось Ван дер Полем [4] и, независимо от него, А.А. Андроновым [11].

Отметим, что в осцилляторе Ван дер Поля применяется удвоенная потенциальная энергия. В локальной по ε теории число ε^* не оценивается; цикл остается притягивающим при увеличении ε ; чем дальше ε от нуля, тем колебания осциллятора менее похожи на гармонические.

Пример 2. Скорректированный математический маятник

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon(1 - 2K(h^*) \sin^2(x/2))\dot{x}.$$

В нелинейной системе вычисление функции $z(\tau)$ затрудняется незнанием функции, описывающей колебания. Для математического маятника $\Pi = 2 \sin^2(x/2)$. Зависимость (11) численно построена в [24].

Особенностью математического маятника является ограниченность по h сверху области колебаний. Близ точки $h = 0$ (малые колебания) скорость приближения к циклу пропорциональна εh^2 .

Математический маятник исследуется в задаче об относительном движении спутника в плоскости круговой орбиты [25]. Адаптивная схема стабилизации (в малом) колебания спутника

$$(23) \quad \ddot{x} + |\mu| \sin x = \varepsilon \sigma (1 - 2K(h^*)x^2)\dot{x}$$

предлагается в [2]; решается локальная задача притяжения траекторий из окрестности стабилизируемого колебания.

Для спутника принимаются обозначения [25]: μ – инерциальный параметр ($|\mu| \leq 3$), α – угол между радиусом-вектором центра масс и главной центральной осью инерции спутника в плоскости орбиты, v – истинная аномалия, выбранная в качестве независимой переменной. В уравнении (23) принято: $x = 2\alpha$, $\mu > 0$ или $x = 2\alpha + \pi$, $\mu < 0$; $\sigma = 1$.

Заменой в уравнении (23) члена $2K(h^*)x^2$ на $2K(h^*)|\mu| \sin^2(x/2)$ по теореме 2 достигается цикл, притягивающий все траектории из области колебаний. Тем самым обеспечивается глобальное притяжение траекторий.

Для малых μ (“сплюснутый” спутник) вместо равновесия может быть интересно использовать стабилизированное (в большом) долго-периодическое колебание спутника близ равновесия.

Пример 3. Задача двух тел

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\gamma y}{x^2 + y^2}, \quad \gamma > 0$$

имеет интеграл площадей

$$(24) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c, \quad c = \text{const}.$$

На интегральном многообразии (24) динамика описывается консервативной системой

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{\gamma}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

которая при фиксированной значении $c = c_*$ обладает семейством эллиптических орбит (постоянному решению этого уравнения отвечают круговые орбиты).

Согласно теореме 2 в скорректированной системе

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c_*^2}{r^3} + \frac{\gamma}{r^2} = \varepsilon((1 - K(h^*))\Pi(r))\frac{dr}{dt}, \quad \Pi = \frac{2c_*^2}{r^2} - \frac{\gamma}{r}$$

стабилизируется (в большом) любая орбита задачи двух тел, близкая к эллиптической орбите с энергией h^* . Притягивание других орбит к плоскости c_* обеспечивается уравнением $\dot{\Delta}c = -\Delta c$, $\Delta c = c - c_*$.

Пример 4. Динамика тяжелого твердого тела с неподвижной точкой описывается классическими уравнениями Эйлера–Пуассона

$$(25) \quad \begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2r - \gamma_3q, \\ B\dot{q} &= (C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3p - \gamma_1r, \\ C\dot{r} &= (A - B)pq + P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1q - \gamma_2p, \end{aligned}$$

записанными в квазикоординатах: A, B, C – главные моменты инерции тела, P – вес тела, x_0, y_0, z_0 – координаты центра тяжести, $\Omega = (p, q, r)$ – угловая скорость, $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор вертикали, направленный вверх.

При $y_0 = 0$ система (25) допускает интегральное многообразие:

$$(26) \quad p = 0, \quad r = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

На нем реализуются движения Млодзиевского [26], которые описываются системой

$$(27) \quad B\dot{q} = P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad \dot{\gamma}_1 = \gamma_2r - \gamma_3q, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1q - \gamma_2p.$$

С учетом геометрического соотношения $\gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 1$ и замены $\gamma_1 = \cos \delta$, $\gamma_2 = \sin \delta$ система (27) приводится к уравнению математического маятника

$$B\ddot{\delta} + P\sqrt{x_0^2 + z_0^2} \sin(\delta - \nu) = 0, \quad \nu = \tan(z_0/x_0).$$

Таким образом, при любом выбранном значении энергии для колебания Млодзиевского строится притягивающий (в большом) цикл. Притяжение к многообразию (26) обеспечивается, как в примере 3, линейной диссипацией по переменным p, r, γ_2 .

Вместе с плоскими колебаниями Млодзиевского исследуемое тело допускает [27] второе семейство маятниковых колебаний. Оно – пространственное. Семейство описывается редуцированной консервативной системой с одной степенью свободы и выделяется шаг за шагом из системы (25) при $y_0 = 0$ в процессе построения редуцированной системы. Стабилизация колебаний (в большом) проводится согласно теории разделов 2–4.

Замечание 3. В примерах даются новые результаты для приведенных задач.

7. Заключительные замечания

В консервативной системе колебания образуют семейства. Поэтому стабилизация колебания возможна только в рамках управляемой системы. Обычно применяются управления, явно зависящие от времени.

Для консервативной системы, допускающей семейство колебаний, всегда строится ε -скорректированная система, обладающая притягивающим (в большом) циклом. Применяется автономное управление с малым коэффициентом усиления регулятора. Оно дается нелинейной диссипацией, действующей без задержки в текущей точке траектории и отслеживающей потенциальную энергию системы. Область притяжения циклом включает область колебаний Ω консервативной системы и ε -окрестность Ω . Цикл строится для колебания с любой желаемой энергией консервативной системы. Стабилизация происходит по адаптивной схеме.

Основные результаты по заявленной цели исследования формулируются в трех теоремах. В теореме 1 показывается существование цикла и решается задача стабилизации в малом (в окрестности рассматриваемого колебания). Далее (теорема 2) устанавливается притяжение к циклу траекторий, начинающихся в любой точке области колебаний консервативной системы. В теореме 3 результаты теорем 1 и 2 для системы с одной степенью свободы переносятся на многомерную систему; приводится соответствующая скорректированная лагранжевая система. В примерах анонсируются новые результаты в классических задачах.

В статье решается ряд вопросов нелинейной механики, теории колебаний, бифуркации и теории управления. В классической механике рассматривается

только линейная диссипация. В данном исследовании дается пример универсальной нелинейной диссипации, определяющейся потенциальной энергией. Она может объяснять и наблюдаемые в природе явления.

Для изучения семейства нелинейных колебаний консервативной системы в статье предлагается применять теорию для линейных систем. Соответствующая теорема 4 выведена в Приложение и стала результатом усилий автора для понятного изложения основного материала статьи. Идея введения *нового времени* приводит систему нелинейных колебаний к изохронному семейству.

Выводы по притяжению в большом стали качественно новыми в теории бифуркации: малое параметрическое возмущение системы приводит к глобальной перестройке фазового портрета.

Что касается теории управления, то здесь проводится идея использовать природу незамкнутой системы. Предложенное управление является только корректирующим. В примерах 3 и 4 схема стабилизации демонстрируется на классических задачах. Другие приложения находятся в задачах орбитальной стабилизации космических аппаратов в дальних миссиях. Здесь основным ограничением является энергетический ресурс. Маневры с применением гравитационного притяжения (потенциальной энергии) востребованы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразование семейства невырожденных (нелинейных) колебаний в изохронное семейство

Рассматривается консервативная система

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad \frac{\dot{x}^2}{2} + \int f(x) dt = h(\text{const}),$$

допускающая семейство Σ невырожденных одночастотных колебаний. На невырожденном семействе по определению период $T(h)$ монотонно меняется с h .

Теорема 4. Невырожденное семейство колебаний $\Sigma = \{x(h, t)\}$ консервативной системы всегда преобразуется в изохронное семейство с временем $\tau = (T(h)/T^)t$, которое выбирается вместе с периодом T^* колебания семейства, потенциальной энергией $\tilde{\Pi}(x) = \Pi(x)(T^*/T(h))^2$ и полной энергией $\tilde{h} = h(T^*/T(h))^2$. На семействе Σ справедлив закон*

$$x^2 \left(h \left(\frac{T^*}{T(h)} \right)^2, 0 \right) = h \left(\frac{T^*}{T(h)} \right)^2,$$

связывающий амплитуду и энергию колебаний.

Доказательство. Потенциальная энергия $\Pi(x)$ является функцией одной переменной x . Она зависит от h через решение $x = \varphi(h, t)$. При переходе к новой независимой переменной $\tau = (T(h)/T^*)t$ период на колебании становится равным T^* , поэтому x является T^* -периодической функцией переменной τ .

Это происходит на всех колебаниях семейства, которое тем самым преобразуется в изохронное семейство с периодом T^* . Для колебания с нулевой начальной скоростью имеем $\Pi(x(h, 0)) = h$. Начальное значение h сохраняется в функции $x(h, \tau)$, поэтому записывается

$$\Pi = hz(\tau), \quad 0 \leq z(\tau) \leq 1, \quad z(\tau) = z(\tau + T^*).$$

Интеграл энергии на семействе колебаний с учетом введения новой независимой переменной τ принимает вид

$$(П.1) \quad \left(\frac{T(h)}{T^*} \right)^2 \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 2(h - \Pi).$$

В более привычной форме получается

$$(П.2) \quad \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 2(\tilde{h} - \tilde{\Pi}), \quad \tilde{h} = h \left(\frac{T^*}{T(h)} \right)^2, \quad \tilde{\Pi} = \Pi(x) \left(\frac{T^*}{T(h)} \right)^2.$$

Колебания с начальной нулевой скоростью в преобразованной системе описываются формулой

$$x(\tau) = x(\tilde{h}, 0)e(\tau), \quad 0 \leq e(\tau) \leq 1, \quad e(\tau) = e(\tau + T^*).$$

На них выполняется равенство

$$(П.3) \quad x^2(\tilde{h}, 0) = \tilde{h}$$

– закон зависимости амплитуды изохронных колебаний от энергии системы $\tilde{h}$. Поэтому справедлив закон

$$(П.4) \quad x^2 \left(h \left(\frac{T^*}{T(h)} \right)^2, 0 \right) = h \left(\frac{T^*}{T(h)} \right)^2$$

зависимости амплитуды нелинейных колебаний на семействе Σ от энергии h .

Замечание 4. В случае линейного осциллятора в (П.3) функция $T(h)$ сводится к постоянной и зависимость (П.3) известна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний управляемой автономной системы // *АиТ.* 2023. № 5. С. 29–44. <https://doi.org/10.31857/S0005231023050033>
Tkhai V.N. Stabilization of oscillations of a controlled autonomous system // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 5. P. 476–485.
<https://doi.org/10.1134/S0005117923050089>
2. *Тхай В.Н.* Адаптивная схема стабилизации колебаний автономной системы // *АиТ.* 2024. № 9. С. 77–92. <https://doi.org/10.31857/S0005231024090046>
Tkhai V.N. An adaptive stabilization scheme for autonomous system oscillations // *Autom. Remote Control.* 2024. V. 85. No. 9. P. 795–804.
<https://doi.org/10.1134/S000511792470019X>

3. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
4. *Van der Pol.* On relaxation-oscillations in the circuit with non-linear resistance // Philos. Mag. 1927. Ser. 7. V. 3. No. 13. P. 65–80.
5. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. Пер. с фр. <https://search.rsl.ru/ru/record/01006011393>
6. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ. мат. лит., 1959. Переработка и доп. Н.А. Железцова. 2-е изд. <https://search.rsl.ru/ru/record/01005974002>
7. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, 1945.
8. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. <https://search.rsl.ru/ru/record/01005891422>
9. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях, Труды ММО. 1963. Т. 12. С. 3–52. <https://www.mathnet.ru/rus/mmo137>
10. *Макаренков О., Lamb J.S.W.* Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: a survey // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2012. V. 241. Iss. 22. P. 1826–1844. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2012.08.002>
11. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // Журн. эксп. теор. физики. 1933. Вып. 5. С. 373–374.
12. *Тхай В.Н.* Колебания в автономной модели, содержащей связанные подсистемы // АиТ. 2015. № 1. С. 81–90. <https://www.mathnet.ru/rus/at14174>
Tkhai V.N. Oscillations in the autonomous model containing coupled subsystems // Autom. Remote Control. 2019. V. 76. No. 1. P. 64–71. <https://doi.org/10.1134/S0005117915010051>
13. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92. <https://www.mathnet.ru/rus/at15356>
Tkhai V.N. Stabilizing the oscillations of a controlled mechanical system // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004. <https://doi.org/10.1134/S0005117919110043>
14. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению части переменных // Вест. МГУ. Серия Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1957. № 4. С. 9–16.
15. *Пуш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. Пер.с англ. М.: Мир, 1980.
16. *Boubaker O.* The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: a survey // Int. J. Adv. Robot. Syst. 2013. V. 10. No. 5. <https://doi.org/10.5772/55058>
17. *Fradkov A.L* Swinging control of nonlinear oscillations // Int. J. Control. 1996. V. 64. Iss. 6. P. 1189–1202. <https://doi.org/10.1080/00207179608921682>
18. *Åström K.J., Furuta K.* Swinging up a pendulum by energy control // Automatica. 2000. V. 36. Iss. 2. P. 287–295. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00140-5](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00140-5)

19. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: virtual constraints approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176.
<https://doi.org/10.1109/TAC.2005.852568>
20. *Kant K., Mukherjee R., Khalil H.* Stabilization of energy level sets of underactuated mechanical systems exploiting impulsive braking // Nonlinear Dynam. 2021. V. 106. P. 279–293. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06831-3>
21. *Guo Yu., Hou B., Xu Sh., et.al.* Robust stabilizing control for oscillatory base manipulators by implicit Lyapunov method // Nonlinear Dynam. 2022. V. 108. P. 2245–2262. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07321-w>
22. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации ИСЗ на экваториальной орбите // Космические исследования. 2022. Т. 60. № 5. С. 404–412.
<https://doi.org/10.31857/S002342062204001X>
23. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения / Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263. <https://search.rsl.ru/ru/record/01005581860>
24. *Tkhai V.N.* On stabilization of pendulum type oscillations of a rigid body // Proc. 2018 14th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB).
IEEE Xplore: <https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408408>
25. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс / Искусственные спутники Земли. 1958. № 1. С. 25–43. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
26. *Млодзиевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук об-ва любит. естеств., антропол. и этнограф. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
27. *Tkhai V.N.* Spatial oscillations of a physical pendulum // Proc. 2022 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), IEEE Xplore: <https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807507>

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Моржениным.

Поступила в редакцию 27.11.2024

После доработки 25.02.2025

Принята к публикации 21.04.2025